Práctica 5

Derivadas

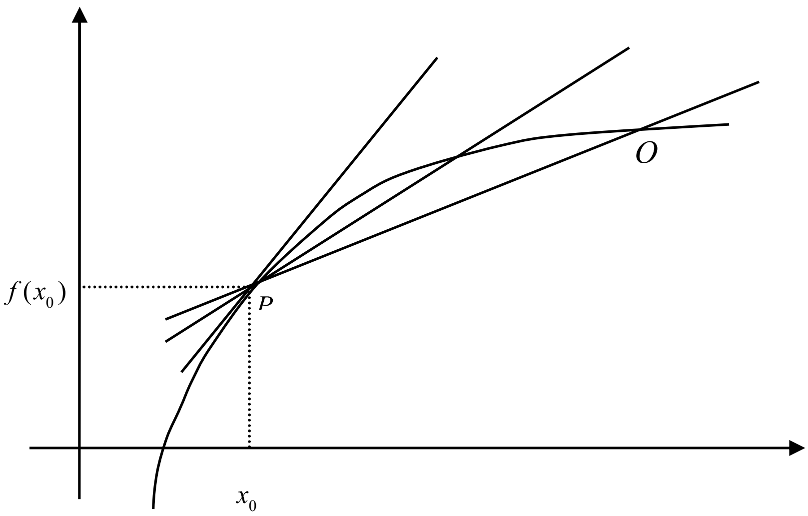
La noción de derivada nos permitirá distinguir, no sólo los cambios que se producen entre magnitudes relacionadas entre sí, sino también lo más o menos rápidamente que ocurren estos cambios. La necesidad de medir y de cuantificar la variación ocurrida, fue lo que condujo a la noción de derivada.

Para algunas funciones sucede que, en algún intervalo, al aumentar x aumenta también el valor de $f(x)$. Esto ocurre, por ejemplo para $f(x)=x^2$ y para $g(x)=x^3$ cuando $x\in[1,+\infty)$ y tiene sentido preguntarse cuál crece más deprisa que la otra. La derivada es una herramienta fundamental para responder a esta pregunta, así como a todo lo relacionado con el comportamiento de las funciones.

1. Recta tangente a una curva en un punto dado

1.1 Idea intuitiva

Consideramos una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y un punto $P=(x_0,f(x_0))$ de su gráfico. Queremos determinar si existe la recta tangente al gráfico de *f* en el punto *P*. Para ello, consideramos un punto $Q\neq P$ del gráfico de f y la recta secante por *P* y *Q*. Si el punto *Q* se acerca a *P*, moviéndose sobre la curva (gráfico de f), las rectas secantes correspondientes se aproximarán a una recta que responde a la idea geométrica de recta tangente a una curva en un punto dado. Así, la recta tangente a una curva en un punto *P*, surge como el límite de las rectas secantes *PQ* cuando *Q* se aproxima a *P* sobre la curva por derecha o por izquierda.

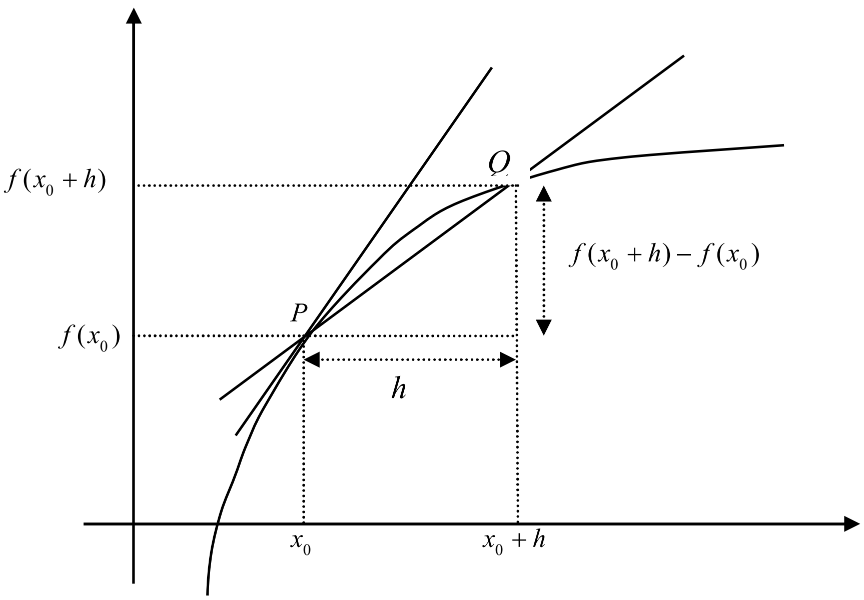


Observamos que alcanza con conocer la pendiente de la recta tangente al gráfico de *f* para obtener su ecuación, ya que se conoce un punto de dicha recta: $P=(x_0, f(x_0))$.

Con esta idea, y utilizando la noción de límite, calculamos la pendiente de la recta tangente al gráfico de *f* en $P=(x_0, f(x_0))$.

Cálculo de la pendiente de la recta tangente en $P=(x_0, f(x_0))$

Consideramos un punto $Q=(x_0+h, f(x_0+h))$ con $h\neq 0$. La pendiente de la recta por *P* y *Q* es igual a $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.



Para que el punto *Q* se acerque a *P*, lo que debe ocurrir es que la abscisa (x_0+h) de *Q* tienda a la abscisa x_0 de *P*, lo que equivale a que *h* tienda a 0. Así, si existe $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=m$, diremos que *m es la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto* $P=(x_0, f(x_0))$.

Ejemplo del cálculo de la pendiente la recta tangente

Hallar, si existe, la pendiente de la recta tangente al gráfico de $f(x)=x^2$ en el punto $P=(2, f(2))=(2,4)$.

Calculamos

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h}=4.$$

Es decir que la pendiente de la recta tangente en $x=2$ es igual a 4.

Como la recta pasa por el punto $(2,f(2))=(2,4)$, la ecuación de la tangente es $y=4(x-2)+4$.

1.2. Derivada

Definición. Cociente incremental

Dada una función *f* definida en un intervalo (a,b) y $x_0\in(a,b)$, al cociente $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ se lo denomina *cociente incremental.* Hemos visto que, gráficamente es la pendiente de la recta secante por los puntos $P=(x_0,f(x_0))$ y $Q=(x_0+h,f(x_0+h))$ con $h\neq 0$.

Definición. Derivada en un punto

Sea f definida en un intervalo (a,b) y sea $x_0\in(a,b)$. Diremos que *f* es *derivable en* x_0 si existe y es finito el $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Cuando esto ocurre, el valor de dicho límite se denota $f'(x_0)$ (se lee: *f* prima en x_0) y se denomina *derivada de f en* x_0.

En el ejemplo anterior, vimos que $f(x)=x^2$ es derivable en *x*=2, y vale que $f'(2)=4$.

Ecuación de la recta tangente

Hemos definido la *recta tangente al gráfico de una función f*, en un punto $P=(x_0,f(x_0))$, como *la recta límite de las rectas secantes PQ* cuando $Q=(x_0+h,f(x_0+h))$ tiende a *P* permaneciendo en la curva. Esta posición límite de las secantes tiene pendiente $f'(x_0)$ y esa recta pasa por *P*, por lo tanto la ecuación de la recta tangente en $(x_0,f(x_0))$ es

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

Ejemplo del cálculo de la derivada en un punto

Sea $f(x)=\sqrt{x+5}$. Hallar el valor de la derivada en $x_0=4$ y dar la ecuación de la recta tangente en el punto $(4, f(4))$.

Calculamos el límite del cociente incremental cuando $h \to 0$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h+5}-\sqrt{9}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9+h}-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9+h}-3}{h}\cdot\frac{\sqrt{9+h}+3}{\sqrt{9+h}+3}=$$

Es una indeterminación del tipo 0/0

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(9+h)-3^2}{h(\sqrt{9+h}+3)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{9+h}+3)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{9+h}+3}=\frac{1}{6}.$$

Hemos obtenido que f es derivable en x=4 y su derivada es $\boxed{f'(4)=\frac{1}{6}.}$

Además, la ecuación de la recta tangente es $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=\frac{1}{6}(x-4)+3$.

Notemos que si en el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

denotamos $x_0+h=x$, entonces que $h\to 0$ es equivalente a que $x\to x_0$. Por lo tanto, el límite anterior es el mismo que $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ y se tiene que

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

La primera consecuencia importante de que f sea derivable en x_0 es que f es continua en x_0. Es decir, para que una función pueda ser derivable en x_0 es necesario que sea continua en x_0. Si no hay continuidad, ya no es posible la derivabilidad. Por eso, debemos asegurarnos de que f es continua antes de investigar si es derivable.
Demostramos ahora esta afirmación.

Teorema

Si f es derivable en x_0 entonces f es continua en x_0.

Demostración

Por ser f derivable en x_0, existe $f'(x_0)$ y vale que $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Queremos demostrar que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Para ello calculamos

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=$$

Multiplicamos y dividimos por $x-x_0\neq 0$

Por propiedad del límite de un producto.

$$=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

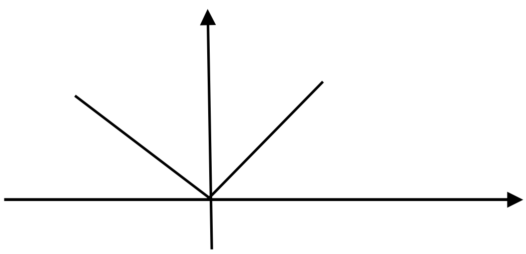
De $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$, se deduce que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Por lo tanto, f es continua en x_0.

Veamos que la recíproca es falsa. Es decir que hay funciones continuas en un punto que no son derivables en ese punto.

A continuación, dos ejemplos de funciones continuas en $\boldsymbol{x}_0$ y no derivables en $\boldsymbol{x}_0$.

1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=|x|$.

Hemos visto que f es continua en $\mathbb{R}$, en particular lo es en $x=0$.



Para probar que no es derivable en 0, calculamos los límites laterales del cociente incremental.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1.$$

Como los límites laterales son distintos, f no es derivable en x=0 y no existe la recta tangente al gráfico de f en (0,0). Dado que este punto es un punto "anguloso" del gráfico de f, es geométricamente evidente que no puede existir una recta tangente.

2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=x\cdot\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ si $x\neq 0$ y $f(0)=0$.

Analizamos la continuidad de *f* en *x*=0.

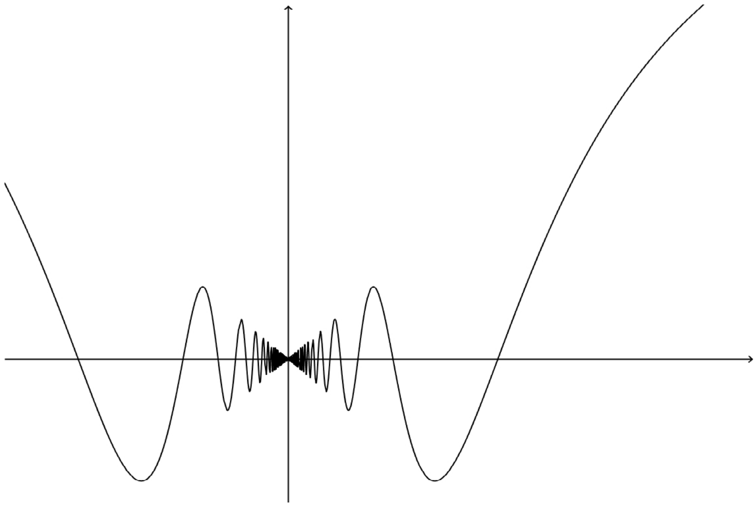
Como $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x.\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}=0=f(0)$, obtenemos que *f* es continua en 0.

Es "0×acotado"

Para analizar la derivabilidad, calculamos el límite cuando $h\to 0$ del cociente incremental:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\operatorname{sen}\frac{1}{h}.$$

Hemos visto que este límite no existe. Por lo tanto, *f* no es derivable en *x*=0.
El siguiente es un gráfico aproximado de *f*.



Estudio de la derivabilidad de *f* en x_0. Ejercicio resuelto

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\begin{cases} x^3+1 & \text{si } x\geq 1\\ \dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{2} & \text{si } x<1\end{cases}$

Decidir si *f* es derivable en *x*=1. En caso afirmativo, dar la ecuación de la recta tangente al gráfico de *f* en (1,*f*(1)).

Calculamos los límites laterales del cociente incremental.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x^3+1)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=3\,.$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{3}{2}(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3}{2}(x+1)=3$$

Dado que los límites laterales coinciden, podemos afirmar que *f* es derivable en $x=1$

y que $\boxed{f'(1)=3\,.}$

Además la ecuación de la recta tangente al gráfico de *f* en el punto (1,2) es

$$\boxed{y=f'(1)(x-1)+f(1)=3(x-1)+2=3x-1\,.}$$

Definición. Función derivada

Sea $f:A\to\mathbb{R}$, con A un intervalo abierto o una unión de intervalos abiertos. Diremos que *f es derivable en A*, si *f* es derivable en todo punto de A.

Cuando esto ocurre, para cada $x\in A$, existe $f'(x)\in\mathbb{R}$. Tenemos una nueva función, que llamaremos *función derivada* y que notaremos con f' (se lee *f* prima) tal que, a cada *x* le asocia $f'(x)$.

2. Cálculo de algunas funciones derivadas

Demostraremos la *derivablidad* de algunas funciones a través del cálculo del cociente incremental, y obtendremos cuánto valen sus derivadas en sus respectivos dominios. Comenzamos con las funciones más sencillas.

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2$.

Tenemos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=2x\,.$$

Luego, $f(x)=x^2$ es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es $f'(x)=2x$.

Escribiremos también $\boxed{(x^2)'=2x\,.}$

En particular, cuando *x*=2, $f'(2)=4$ como habíamos calculado al comienzo.

La función $f'(x)$ nos da el valor de la pendiente de la tangente en cada punto del gráfico de *f*.

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=k$, con $k\in\mathbb{R}$.

Calculamos el límite del cociente incremental:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=\lim_{h\to 0}0=0.$$

Hemos obtenido que la función constante es derivable en $\mathbb{R}$, y su derivada es la función nula, lo escribimos como $\boxed{k'=0.}$

Observemos que, como el gráfico de la función constante es una recta paralela al eje x, esta recta es su tangente en todo punto y su pendiente es igual a cero.

Sea $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{x}$.

En este caso, el límite del cociente incremental es

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(x+h)x}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)x}=\frac{-1}{x^2}.$$

De este cálculo resulta que $f(x)=\frac{1}{x}$ es derivable en su dominio: $\mathbb{R}-\{0\}$ y su derivada es $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$. Esto lo notamos como $\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{-1}{x^2}.}$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\operatorname{sen}x$.

Calculamos el límite del cociente incremental

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{1}{2}(x+h+x)\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(x+h-x)\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x.$$

Reagrupando convenientemente.

Por continuidad del cos, y por $\frac{\operatorname{sen}x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}1$

Hemos obtenido que la función seno es derivable en $\mathbb{R}$, y su derivada es la función coseno.

Esto lo notamos como $\boxed{(\operatorname{sen} x)' = \cos x\,.}$

Sea $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\cos(x)$.

Calculamos el límite del cociente incremental

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(x+h+x)\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(x+h-x)\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}-\operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\operatorname{sen} x\,.$$

Reagrupando convenientemente

Por continuidad del seno, y por $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}1$

Hemos obtenido que la función coseno es derivable en $\mathbb{R}$, y su derivada es la función $-\operatorname{sen} x$. Esto lo notamos como $\boxed{(\cos x)' = -\operatorname{sen} x\,.}$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(x)$.

Calculamos el cociente incremental

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}=\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)=\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=$$

Por propiedad del ln.

$$=\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}.$$

Multiplicando y dividiendo por x en el exponente.

Por lo tanto, usando que $\lim\limits_{h\to 0}\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=e$, y que la función ln es continua, resulta

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\cdot\ln(e)=\frac{1}{x}.$$

Luego, $f(x)=\ln x$ es derivable en $(0,+\infty)$ y su derivada es $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Escribiremos $\boxed{(\ln(x))'=\dfrac{1}{x}.}$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^x$.

Calculamos el cociente incremental

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\frac{e^x(e^h-1)}{h}. \qquad (*)$$

Definimos $k(h)=e^h-1$, entonces $\lim_{h\to 0}k(h)=0$, y tenemos que $e^h=k+1$, o sea, $h=\ln(k+1)$.

Reemplazamos en $(*)$ y obtenemos que

$$e^x\cdot\frac{k}{\ln(k+1)}=\frac{e^x}{\frac{1}{k}\cdot\ln(k+1)}=\frac{e^x}{\ln(k+1)^{\frac{1}{k}}}=\frac{e^x}{\ln e}=e^x.$$

Usamos que $(k+1)^{\frac{1}{k}}\xrightarrow[k\to 0]{}e$

Luego, $f(x)=e^x$ es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es $f'(x)=e^x$.

Escribiremos $\boxed{\left(e^x\right)'=e^x.}$

2.1 Tabla de las derivadas de algunas funciones

f	f'
k	0
x	1
x^2	$2x$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$

3. Reglas de derivación

Las funciones que vamos a estudiar en lo que sigue, están definidas como sumas, productos, cocientes o composiciones de funciones elementales como las que figuran en la tabla anterior. Veremos ahora cómo actúa la derivada con estas operaciones, lo que nos permitirá calcular numerosas derivadas conociendo unas pocas de ellas.

3.1 Derivada de la suma y del producto de funciones

Reglas de derivación. Derivada de la suma y del producto de funciones

Sean f y g funciones derivables, entonces las funciones $f+g$, $c \cdot f(x)$ $(c \in \mathbb{R})$ y $f \cdot g$ son derivables y vale que:

$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

Las demostraciones se deducen de las propiedades de límite y pueden verse en el Anexo A Regla de la suma y del producto de funciones.

Ejemplos

Para las siguientes funciones f, calcular su función derivada f' utilizando la tabla de derivadas y las reglas de derivación.

- $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$

  $f'(x) = (x^3)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 3x^2 + \frac{-1}{x^2}$

- $f(x) = e^x + 5x^2 + 3$

  $f'(x) = (e^x)' + (5x^2)' + 3' = e^x + 5 \cdot 2x + 0 = e^x + 10x$

- $f(x) = 3\cos x + \sqrt{x}$

  $f'(x) = (3\cos x)' + (\sqrt{x})' = -3\,\mathrm{sen}\,x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- $f(x) = x^5 \cdot \ln x$ $f'(x) = (x^5)' \cdot \ln x + x^5 \cdot (\ln x)' = 5x^4 \cdot \ln x + x^5 \cdot \frac{1}{x} = 5x^4 \cdot \ln x + x^4$

- $f(x) = (x^4 + 2x) \cdot \mathrm{sen}\,x$

  $f'(x) = (x^4 + 2x)' \cdot \mathrm{sen}\,x + (x^4 + 2x) \cdot (\mathrm{sen}\,x)' = (4x^3 + 2) \cdot \mathrm{sen}\,x + (x^4 + 2x) \cdot \cos x$

Ejercicio resuelto

Sea $f(x) = -x^3 + 12x^2 - 36x + 2$. Hallar todos los puntos del gráfico de f en los que la tangente es paralela al eje x.

Queremos que la recta sea paralela al eje x de modo que su pendiente debe ser igual a 0. Por lo tanto, buscamos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $f'(x) = 0$. Es decir,

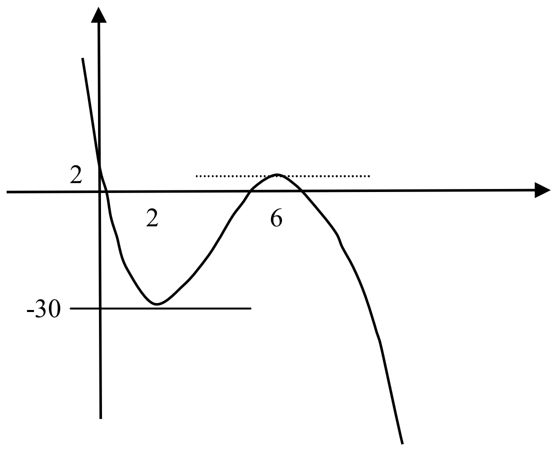
$$f'(x) = -3x^2 + 24x - 36 = 0 .$$

Resolvemos esta ecuación cuadrática y obtenemos

$$-3x^2 + 24x - 36 = -3(x^2 - 8x + 12) = -3(x-2)(x-6) = 0 .$$

Por lo tanto, los valores para los que la derivada es igual a 0 son $\boxed{x = 2 \text{ y } x = 6\,.}$

Finalmente, los puntos del gráfico de *f* en los que la tangente es horizontal son $(2,-30)$ y $(6,2)$. En la figura se muestra un gráfico aproximado de la función *f*.



Reglas de derivación. Derivada del cociente de funciones

Sean *f* y *g* funciones derivables, con $g(x) \neq 0$, entonces la función $\dfrac{f}{g}$ es derivable y vale que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}\,.$$

Ver la demostración en el Anexo B Derivada del cociente de funciones.

Ejemplos

Para las siguientes funciones *f*, calcular su función derivada f' utilizando la tabla de derivadas y las reglas de derivación.

- $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 6}{\operatorname{sen} x}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2x + 6)'\operatorname{sen} x - (3x^2 + 2x + 6)\operatorname{sen} x'}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{(6x+2)\operatorname{sen} x - (3x^2 + 2x + 6)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,.$$

- $f(x) = \text{tg}x$

$$f'(x) = \left(\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}\right)' = \frac{(\text{sen}\, x)' \cdot \cos x - \text{sen}\, x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

- $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

- $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x^3}}$

$$f'(x) = \frac{(e^x)' \cdot x^{3/2} - e^x \cdot \left(x^{3/2}\right)'}{x^3} = \frac{e^x x^{3/2} - e^x \left(\frac{3}{2} x^{1/2}\right)}{x^3}.$$

3.2 Regla de la cadena

Derivada de la composición de funciones. Regla de la cadena

Sean *f* y *g* funciones derivables, entonces la función $f \circ g$, es derivable y vale que:

$$\left(f \circ g\right)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Ver la demostración en el Anexo C Derivada de la composición de funciones. Regla de la cadena.

Ejemplos

Para las siguientes funciones *f*, calcular su función derivada f' utilizando la tabla de derivadas y las reglas de derivación.

- $h(x) = \text{sen}(2x^2 + 3x)$

Aquí, $h = f \circ g$ donde $f(X) = \text{sen}\, X$ y $g(X) = 2X^2 + 3X$. Luego, $f'(X) = \cos X$ y $g'(X) = 4X + 3$. Por lo tanto

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(2x^2 + 3x) \cdot (4x + 3).$$

- $h(x) = (3x + 2\,\text{sen}\,x)^4$

Aquí, $h = f \circ g$ donde $f(X) = X^4$ y $g(X) = 3X + 2\,\text{sen}\,X$. Luego, $f'(X) = 4X^3$ y $g'(X) = 3 + 2\cos X$. Por lo tanto

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 4(3x + 2\,\text{sen}\,x)^3 \cdot (3 + 2\cos x).$$

- $h(x) = \ln(5x^2 + 3x + 1)$

Aquí, $h = f \circ g$ donde $f(X) = \ln X$ y $g(X) = 5X^2 + 3X + 1$. Luego, $f'(X) = \dfrac{1}{X}$ y $g'(X) = 10X + 3$. Por lo tanto

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{5x^2 + 3x + 1} \cdot (10x + 3).$$

- $h(x) = e^{x^2 + \cos x}$

Aquí, $h = f \circ g$ donde $f(X) = e^X$ y $g(x) = X^2 + \cos X$. Luego, $f'(X) = e^X$ y $g'(X) = 2X - \text{sen}\,X$. Por lo tanto

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x^2 + \cos x} \cdot (2x - \text{sen}\,x).$$

- $k(x) = e^{\text{sen}^2 x}$

Aquí, $k = f \circ g \circ h$ donde $f(X) = e^X$ y $g(X) = X^2$ y $h(X) = \text{sen}\,X$. Luego, $f'(X) = e^X$ y $g'(X) = 2X$ y $h'(X) = \cos X$. Por lo tanto

$$k'(x) = f'((g \circ h)(x)) \cdot (g \circ h)'(x) = f'(g(h(x)) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) =$$

$$= e^{\text{sen}^2 x} \cdot (2\,\text{sen}\,x) \cdot \cos x.$$

- $k(x) = \ln(\cos(3x^2 + x + 1))$

Aquí, $k = f \circ g \circ h$ donde $f(X) = \ln X$ y $g(X) = \cos X$ y $h(X) = 3X^2 + X + 1$. Luego, $f'(X) = \dfrac{1}{X}$ y $g'(X) = -\text{sen}\,X$ y $h'(X) = 6X + 1$. Por lo tanto

$$k'(x) = f'((g \circ h)(x)) \cdot (g \circ h)'(x) = f'(g(h(x)) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) =$$

$$= \frac{1}{\cos(3x^2+x+1)} \cdot (-\operatorname{sen}(3x^2+x+1)) \cdot (6x+1)\,.$$

Derivada de f^g

Sean f y g funciones derivables con $f(x) > 0$ para todo x en el dominio de f y sea $h(x) = f(x)^{g(x)}$, entonces la función h es derivable y vale que

$$h'(x) = \left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)}\left(\ln(f(x)) \cdot g'(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot g(x)\right).$$

Veamos cómo calcular h', suponiendo que h es derivable.

Si $h(x) = f(x)^{g(x)}$, entonces por propiedades del ln, resulta que

$$\ln(h(x)) = g(x) \cdot \ln(f(x))\,.$$

Derivamos ambos miembros utilizando las reglas de derivación del producto y de la composición, y obtenemos

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\,.$$

Luego

$$h'(x) = h(x)\left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

Por lo tanto, la función $f(x)^{g(x)}$ es derivable y vale que

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = h(x)\left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

Ejemplos

- $h(x) = (3x^2+5)^{\operatorname{sen} x}$

Tenemos que $f(x) = (3x^2+5)$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$, y obtenemos que

$$\ln(h(x)) = \operatorname{sen} x \cdot \ln(3x^2+5)\,.$$

Derivamos en ambos miembros y obtenemos

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \cos x \cdot \ln(3x^2+5) + \operatorname{sen} x \cdot \frac{6x}{3x^2+5}.$$

Luego, despejando $h'(x)$

$$h'(x) = \left((3x^2+5)^{\operatorname{sen} x}\right)' = (3x^2+5)^{\operatorname{sen} x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln(3x^2+5) + \operatorname{sen} x \cdot \frac{6x}{3x^2+5}\right).$$

- $h(x) = (\operatorname{sen}^2 x)^x$

Procedemos como en el ejemplo anterior

$$\ln(h(x)) = x \cdot \ln(\operatorname{sen}^2 x).$$

Derivamos

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \ln(\operatorname{sen}^2 x) + x \cdot \frac{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x},$$

de donde resulta que

$$h'(x) = \left((\operatorname{sen}^2 x)^x\right)' = (\operatorname{sen}^2 x)^x \cdot \left(\ln(\operatorname{sen}^2 x) + \frac{2x \cos x}{\operatorname{sen} x}\right).$$

Ejercicio de aplicación

Demostrar que la función $y = x \cdot e^{-x^2/2}$ satisface la ecuación

$$x \cdot y' = (1 - x^2) \cdot y.$$

Calculamos y' usando la regla de derivación del producto y la regla de la cadena

$$y' = x' \cdot e^{-x^2/2} + x \cdot \left(e^{-x^2/2}\right)' = e^{-x^2/2} + x\left(\frac{-2x}{2} \cdot e^{-x^2/2}\right) =$$

$$= e^{-x^2/2}\left(1 - x^2\right).$$

Reemplazamos y obtenemos que

$$x \cdot y' = x\left(e^{-x^2/2}\left(1-x^2\right)\right) = \left(x \cdot e^{-x^2/2}\right)\left(1-x^2\right) = y \cdot \left(1-x^2\right).$$

De modo que la función $y = x \cdot e^{-x^2/2}$, satisface la ecuación.

Ejercicios resueltos

Sea $f(x) = \begin{cases} 3+\sqrt{x+1} & \text{si} \quad x>0 \\ 2x+4 & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$

Decidir si *f* es continua y si es derivable en $x = 0$.

La función es continua ya que

$$\lim_{x\to 0^+} 3+\sqrt{x+1} = \lim_{x\to 0^-} 2x+4 = f(0) = 4.$$

Para analizar la derivabilidad, calculamos el límite cociente incremental para $h > 0$ y para $h < 0$.

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{3+\sqrt{h+1}-4}{h} = \frac{\sqrt{h+1}-1}{h} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{h+1}-1\right)\left(\sqrt{h+1}+1\right)}{h\left(\sqrt{h+1}+1\right)} = \frac{h+1-1}{h\left(\sqrt{h+1}+1\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{h+1}+1\right)}.$$

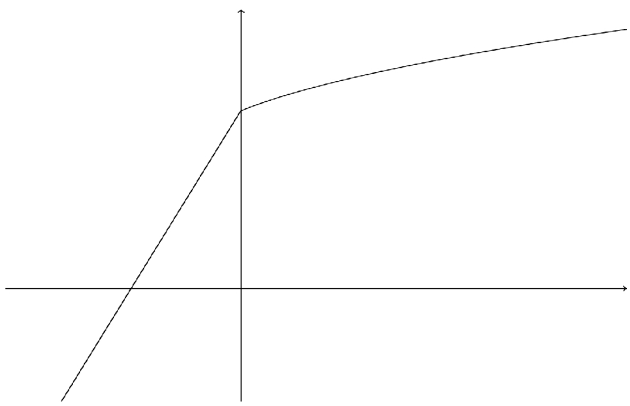
Por lo tanto

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\left(\sqrt{h+1}+1\right)} = \frac{1}{2}.$$

Analizamos el límite para $h < 0$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(2h+4)-4}{h} = 2$$

Así, f no es derivable en $x = 0$ pues los límites laterales del cociente incremental son distintos. El siguiente es un gráfico aproximado de *f*



Sea $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+2 & \text{si} \quad x>1 \\ ax+b & \text{si} \quad x\le 1 \end{cases}$ con $a,b\in\mathbb{R}$.

Determinar los valores de *a* y *b*, de modo que *f* sea continua y derivable en $x=1$.

Para asegurar la continuidad de *f* en $x=1$, debe ocurrir que

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+2=3$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} ax+b=a+b$ deben coincidir con $f(1)=a+b$.

Es decir, $a+b=3$. Esta es la condición que deben cumplir *a* y *b* para que *f* sea continua. Vemos ahora qué ocurre si queremos que *f* sea también derivable en $x=1$.

Calculamos el cociente incremental para $h>0$.

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+h}}+2-3}{h}=\frac{1-\sqrt{1+h}}{h\sqrt{1+h}}=\frac{\left(1-\sqrt{1+h}\right)\left(1+\sqrt{1+h}\right)}{h\sqrt{1+h}\left(1+\sqrt{1+h}\right)}=$$

$$=\frac{1-(1+h)}{h\sqrt{1+h}\left(1+\sqrt{1+h}\right)}=\frac{-h}{h\sqrt{1+h}\left(1+\sqrt{1+h}\right)}=\frac{-1}{\sqrt{1+h}\left(1+\sqrt{1+h}\right)}.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{-1}{2}$.

Cuando $h\to 0^-$, tenemos

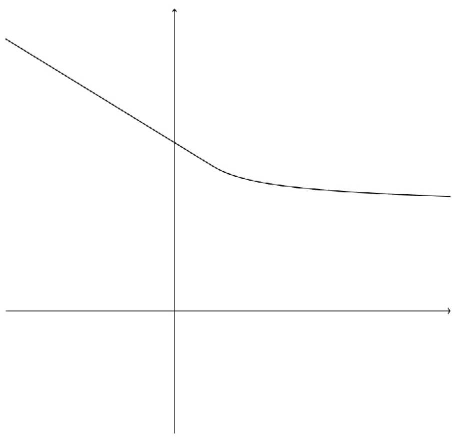
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{a(1+h)+b-a-b}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{ah}{h}=a.$$

Luego, para que *f* sea derivable en $x = 1$, debe ser $\boxed{a = \frac{-1}{2}.}$

Reemplazamos el valor de *a* en la condición hallada para la continuidad y tenemos

$3 = a + b = \frac{-1}{2} + b$, lo que implica que $\boxed{b = \frac{7}{2}.}$

El gráfico aproximado de *f* es

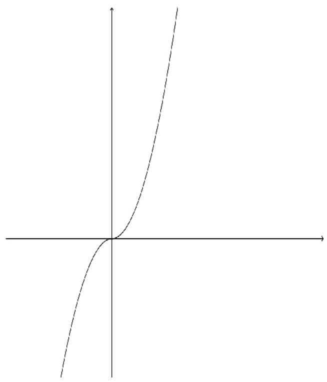


Dos ejemplos importantes

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot |x|$.

Demostraremos que *f* es derivable para todo $x \in \mathbb{R}$, pero f' no es derivable en $x = 0$, de modo que NO existe $f''(0)$.

Graficamos la función *f*

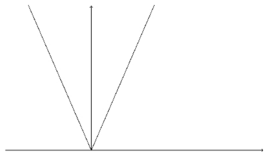


Para $x > 0$ tenemos que $f(x) = x^2$ y $f'(x) = 2x$. Para $x < 0$, $f(x) = -x^2$ y $f'(x) = -2x$. Falta calcular $f'(0)$. Sólo podemos hacerlo a través del límite del cociente incremental.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot |h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0} |h| = 0.$$

Hemos obtenido que $f'(0) = 0$.

Por lo tanto, $f'(x) = 2|x| = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$



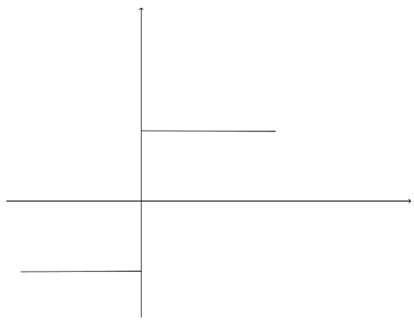
Observen que f' es continua en $x = 0$, pues
$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0 = f'(0)$.
Analicemos la derivabilidad de f' en $x = 0$.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2h - 0}{h} = 2$$

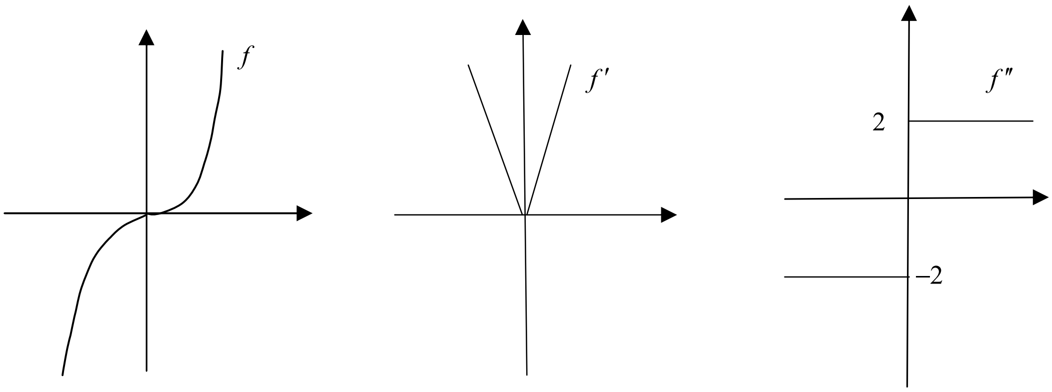
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-2h - 0}{h} = -2.$$

Como los límites son distintos, no existe $f''(0)$. Por lo tanto, f' es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ y su derivada es

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 0 \\ \\ -2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



La existencia de la derivada segunda es una condición fuerte en una función, que muchas veces no se espera que suceda sólo al observar la f y su gráfico, que como en este caso es el de una función "suave". Mostramos a continuación los gráficos de f, f' y f''.



Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x\neq 0$ y $f(0)=0$.

Demostraremos que f es derivable en $\mathbb{R}$, pero su derivada, f', no es continua en $x=0$. Esto implica que f'' no existe en $x=0$. Veremos que el dominio de f'' es $\mathbb{R}-\{0\}$.

Notemos que la fórmula que define a la función f sólo vale para $x\neq 0$ (pues $\frac{1}{x}$ no está definido para $x=0$). Por lo tanto, el valor de $f(0)$ podría elegirse arbitrariamente. Como queremos que f sea continua en $\mathbb{R}$, y $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ (lo que resulta de la propiedad “cero por acotado”), se definió $f(0)=0$.

Comenzamos calculando la derivada de f para $x\neq 0$. Usaremos aquí, las reglas de derivación. Así

$$f'(x)=2x\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)=2x\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

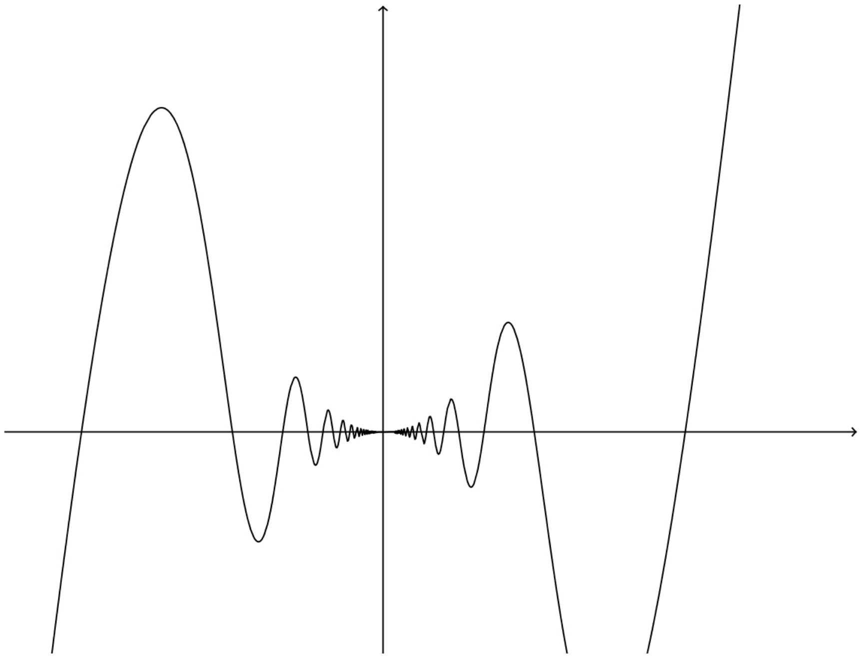
Para $x=0$, esto no es válido ya que se basa en la regla de derivada del producto de dos funciones: x^2 y $\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$. Esta última función no sólo no está definida en $x=0$, sino que no es posible hacerlo de modo que resulte derivable.

Calculamos para $x=0$, el límite del cociente incremental.

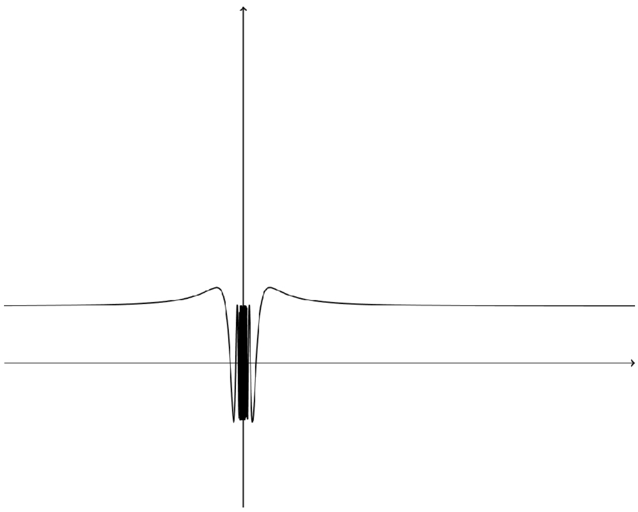
es “0×acotado”

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{h}\right)-0}{h}=\lim_{h\to 0} h\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{h}\right)=0.$$

Por lo tanto, $f'(0)=0$. A continuación, mostramos el gráfico de f.



En resumen, tenemos que $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f'(x)=2x\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x\neq 0$ y $f'(0)=0$.



Esta función f' no es continua en $x=0$, pues cuando $x\to 0$, f' oscila entre -1 y 1. Así, el 0 no pertenece al dominio de f'', ya que al no ser f' continua en $x=0$, no es derivable en dicho punto. Para calcular $f''(x)$ para $x\neq 0$, usamos las reglas de derivación y obtenemos que, para $x\neq 0$

$$f''(x)=2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)+2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

3.3 Derivada de la función inversa

Derivada de la función inversa

Sea f derivable y f^{-1} su inversa, es decir que $(f \circ f^{-1})(x) = x$. Si ambas funciones son derivables de la regla de la cadena se tiene que

$$(f \circ f^{-1})'(x) = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1.$$

Por lo tanto, para los x tales que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, resulta

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Esta igualdad nos permite conocer la derivada de una función inversa, aun cuando no conozcamos su fórmula.

Ejemplos

Sea $f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + 2x - 5$. Usando que $f(5) = 30$, hallar $(f^{-1})'(30)$.

Derivando f tenemos que $f'(x) = 2x + 2$, y $f'(f^{-1}(30)) = f'(5) = 12$.

Por lo tanto, $(f^{-1})'(30) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(30))} = \dfrac{1}{f'(5)} = \dfrac{1}{12}$.

$$\boxed{(f^{-1})'(30) = \frac{1}{12}.}$$

Sea $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$, hallar $(f^{-1})'(x)$.

Hemos visto que la inversa es

$$\operatorname{arc\,sen} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Hallamos la derivada de arcsen usando que $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ y que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

$$(\operatorname{arc\,sen})'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)}.$$

Para reducir esta expresión, si $\operatorname{arc\,sen} x = y$ entonces

$$\operatorname{sen} y = x \text{ con } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

En este intervalo vale que $\cos y > 0$ y además, siempre vale que $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, por lo tanto $\cos y = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1-x^2}$.

Reemplazamos

$$(\operatorname{arc\,sen})'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\boxed{(\operatorname{arc\,sen})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

4. Aplicaciones

4.1 Velocidad

La noción de derivada tiene una interpretación física importante.

Consideremos una partícula que se mueve en una línea recta, de modo que su posición varía con el tiempo. Sea $s(t)$ la distancia de la partícula a un punto fijo 0, en el instante *t*. Así, en el instante t_0 la partícula se encuentra en $s(t_0)$ y, en el instante *t*, se encuentra en $s(t)$. Luego, en el tiempo $(t-t_0)$, la partícula se desplazó $s(t)-s(t_0)$ y su velocidad media en el intervalo $[t_0, t]$ es

$$v_m = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}.$$

Para definir la velocidad instantánea en el instante t_0, cuando la partícula se encuentra en $s(t_0)$, consideramos las velocidades medias en intervalos de tiempo cada vez más pequeños que comiencen o terminen en t_0. Es decir, *la velocidad en* t_0 se define como

$$\lim_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}.$$

Si este límite existe, $v(t_0) = s'(t_0)$.

Ejercicio resuelto

La ley de movimiento de un punto a lo largo de una recta es $s(t)=\sqrt{t}+2$ metros después de t segundos, para $t>0$.
Hallar la velocidad instantánea cuando $t=4$.
¿En qué instante alcanzará una velocidad igual a $\frac{1}{6}$ m/seg?

Sabemos que $v(4)=s'(4)$, por lo tanto debemos calcular la derivada de la función *s*.

Tenemos que $s'(t)=\left(\sqrt{t}+2\right)'=\frac{1}{2\sqrt{t}}$, por lo tanto $s'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$.

La velocidad en el instante $t=2$ es igual a $\frac{1}{4}$.

Debemos encontrar los valores de $t>0$ tales que $s'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{6}$, es decir,

$$2\sqrt{t}=6 \Leftrightarrow \sqrt{t}=3 \Leftrightarrow t=9.$$

La velocidad será igual a $\frac{1}{6}$ en el instante $\boxed{t = 9.}$

4.2 Razón de cambio

Razón de cambio

Sea $y=f(x)$ una función y supongamos que x_0 cambia en una cantidad Δx. El cambio correspondiente Δy en $y_0=f(x_0)$ es $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

El cambio promedio de *y* con respecto a *x* es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{con } \Delta x\neq 0.$$

El límite de este cociente cuando $\Delta x\to 0$ es $f'(x_0)$. La derivada se llama razón de cambio de *y* con respecto a *x*.

Ejercicio resuelto.

En cierto tiempo t_0, la longitud del lado de un cuadrado es de 8cm y cada lado aumenta su longitud a una velocidad de 0,2cm/min. Hallar la razón de cambio del área del cuadrado (a) con respecto al tiempo; (b) con respecto a la longitud del lado en el tiempo t_0.

Llamemos $x(t)$ a la longitud del lado del cuadrado en el instante *t*, y $a(t)$ al área del cuadrado en el instante *t*.

Sabemos que $x(t_0)=8$, y $x'(t_0)=0,2$. Además, la relación entre *a* y *x* es

$$\text{área del cuadrado} = a(t)=x^2(t).$$

Derivamos respecto de t y tenemos

$$a'(t) = 2x(t) \cdot x'(t).$$

(a) La razón de cambio del área con respecto al tiempo, en $t = t_0$, es la derivada de a respecto de t en $t = t_0$.

Es decir,

$$\boxed{a'(t_0) = 2x(t_0) \cdot x'(t_0) = 2 \cdot 8 \cdot 0,2 = 3,2\ (\mathrm{cm}^2/\mathrm{min}).}$$

(b) La razón de cambio del área con respecto a la longitud del lado en el instante $t = t_0$, es la derivada de $a(x)$ con respecto a x. en $x_0 = 8$, es decir

$$\boxed{a'(x) = 2x \text{ y } a'(8) = 16.}$$

4.3 Diferencial

Sea f una función derivable en x_0, es decir que existe $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, es finito y lo notamos $f'(x_0)$.

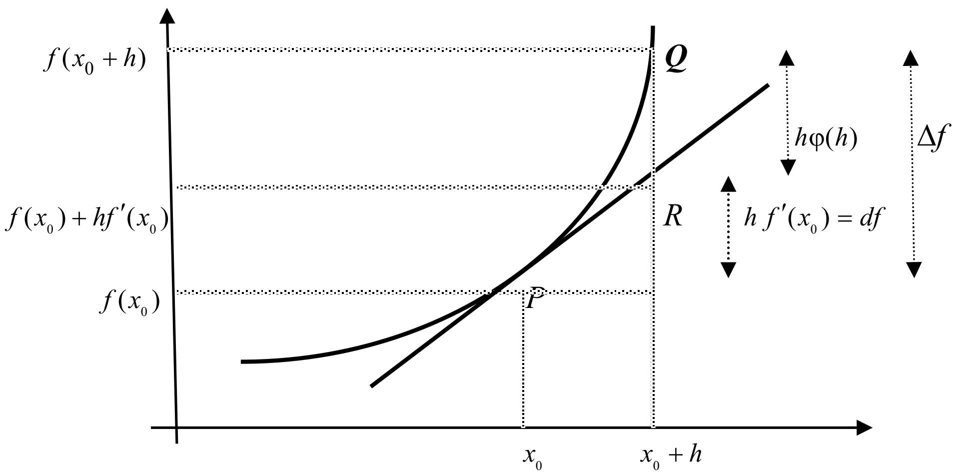
Esta condición es equivalente a decir que, $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \varphi(h)$, donde $\varphi(h)$ satisface que $\varphi(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, y podemos escribir

$$f(x_0+h) - f(x_0) = h \cdot f'(x_0) + h \cdot \varphi(h) \text{ con } \varphi(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

Esta expresión se denomina *incremento de f correspondiente al incremento h en* x_0 y se denota como

$$\Delta f(x_0, h) = \Delta f = f(x_0+h) - f(x_0)$$

Para ver la interpretación geométrica, tracemos la recta tangente al gráfico de f en $P = (x_0, f(x_0))$.



Sabemos que la ecuación de la recta tangente en P es

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Sean Q y R los puntos de abscisa $x_0 + h$ en el gráfico de f y en la tangente respectivamente.

Como Q está en el gráfico de f, su ordenada es $f(x_0 + h)$ y dado que R pertenece a la tangente, su ordenada es $f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$, de donde

$$QR = f(x_0 + h) - f(x_0) - h \cdot f'(x_0) = h \cdot \varphi(h).$$

Cuando los valores de h son suficientemente pequeños, los puntos Q y R son próximos, es decir, $f(x_0 + h)$ se aproxima a $f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \Delta f \cong f(x_0) + h \cdot f'(x_0).$$

Decimos que $f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$ es la aproximación lineal de f para puntos cercanos a $(x_0, f(x_0))$.

La expresión $h \cdot f'(x_0)$ se denomina *diferencial de f* y se denota por

$$df(x_0, h) = df = h \cdot f'(x_0).$$

Se suele representar a h como dx y se denomina *diferencial x*, con lo que resulta

$$df = f'(x)dx.$$

Observen que cuando se reemplaza $f(x_0 + h)$ por $f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$, el error que se comete es igual a $h \cdot \varphi(h)$.

Ejercicio de aplicación

Usando diferenciales, calcular aproximadamente $\sqrt{145}$.

Consideramos $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Si $x_0 = 144$ y $h = 1$, tenenos que

$$\sqrt{145} = f(144 + 1) \simeq f(144) + df(144;1) = \sqrt{144} + 1 \cdot f'(144) =$$

$$= 12 + \frac{1}{2\sqrt{144}} = 12 + \frac{1}{24} = 12{,}041\widehat{6}.$$

Hemos obtenido que

$$\boxed{\sqrt{145} \simeq 12 + \frac{1}{24} = 12{,}041\widehat{6}.}$$

4.4 Derivadas sucesivas

Hemos visto que, f', la derivada de una función f, es también una función (cuyo dominio puede ser más pequeño que el de la *f*). Además, esta nueva función puede o no ser derivable. Si f' es derivable, dará lugar a una nueva función: $(f')'$ a la que llamamos *derivada segunda* y la notamos con f'' (se lee *f* doble prima o *f* segunda).

En forma análoga, podremos obtener f''', f^{IV}, etc, *las derivadas de orden tres, cuatro*, etc.

Ejemplos

(1) $f(x) = x^3 + \dfrac{2}{x}$

$$f'(x) = 3x^2 + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3x^2 - \frac{2}{x^2}$$

$$f''(x) = 6x - (-2)\frac{2}{x^3} = 6x + \frac{4}{x^3}$$

(2) $f(x) = \cos^2 x$

$$f'(x) = 2\cos x(-\operatorname{sen} x) = -2\cos x \operatorname{sen} x$$

$$f''(x) = -2\left[-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x + \cos x \cos x\right] = -2\left[-\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right] = 2\operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2 x\ .$$

$$f'''(x) = 4\operatorname{sen} x \cos x - 4\cos x(-\operatorname{sen} x) = 8\operatorname{sen} x \cos x\ .$$

ANEXO

A. Derivada de la suma y del producto de funciones

A.1 Derivada de la suma

Si f y g son funciones derivables, entonces la función $(f+g)(x)$ es derivable y vales que

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Para demostrar que la derivada de la suma es la suma de las derivadas calculamos el límite del cociente incremental

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) =$$

por ser f y g derivables

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x).$$

Volver

A.2 Derivada del producto

Si f y g son funciones derivables, entonces la función $(f\cdot g)(x)$ es derivable y vale que

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Analizamos el cociente incremental

$$\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} = \frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h) + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot f(x).$$

Vemos que cuando $h \to 0$, dado que *f* y *g* son derivables, el primer sumando tiende a $f'(x)\cdot g(x)$ (aquí estamos usando que la función *g* es continua por ser derivable) y el segundo sumando tiende a $f(x)\cdot g'(x)$.

Por lo tanto $(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$.

Si *c* es una constante y *f* es derivables, entonces la función $(c\cdot f)(x)$ es derivable y vales que

$$(c\cdot f)'(x) = c\cdot f'(x).$$

Este se deduce de la demostración anterior aplicada a la función constante.

$$(c\cdot f)'(x) = c'\cdot f(x) + c\cdot f'(x) = 0\cdot f(x) + c\cdot f'(x) = c\cdot f'(x).$$

Volver

B. Derivada del cociente de funciones

Si *g* es derivable en un intervalo A y $g(x)\neq 0$ para todo $x\in A$ entonces

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-1}{g^2(x)}g'(x).$$

Calculamos el cociente incremental para la función $\frac{1}{g(x)}$.

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) = \frac{g(x)-g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)} = \frac{-1}{g(x+h)\cdot g(x)}\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right).$$

Observamos que cuando $h\to 0$, el primer factor tiende a $\frac{-1}{g^2(x)}$ (aquí estamos usando la continuidad de *g* que sabemos cierta por la hipótesis de *g* derivable) y el segundo factor tiende a $g'(x)$.

Por lo tanto

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right)=\frac{-1}{g^2(x)}g'(x).$$

Hemos demostrado que

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=\frac{-1}{g^2(x)}g'(x)$$

Si f y g son derivables en un intervalo A y $g(x)\neq 0$ para todo $x\in A$ entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Para esto usaremos la demostración anterior y la regla de la derivada de un producto de funciones.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)'=f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot\frac{-1}{g^2(x)}g'(x)=$$

$$=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Volver

C. Derivada de la composición de funciones

Regla de la cadena

Si f y g son derivables vale que $(f\circ g)(x)$ es derivable y su derivada es

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x).$$

Observemos previamente que, si f es derivable entonces $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$, lo que es equivalente a que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varphi(h)$, donde $\varphi(h)$ verifica que $\varphi(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0$.

Es decir que podemos escribir $f(x+h)=f(x)+h\cdot f'(x)+h\cdot\varphi(h)$ con $\varphi(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0$.

Definiendo $\varphi(0)=0$ resulta que φ es continua en 0. En efecto,

$$\lim_{h\to 0}\varphi(h)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right]=f'(x)-f'(x)=0.$$

Esto último vale por la derivabilidad y en consecuencia continuidad de f.

Queremos demostrar que $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(g(x+k))-f(g(x))}{k}=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Consideramos la función $h(k)=g(x+k)-g(x)$. Dado que g es derivable, resulta que g es continua, por lo tanto h es continua en 0 con $h(0)=0$. Usando la observación previa escribimos

$$f(g(x+k))=f(g(x)+g(x+k)-g(x))=f(g(x)+h(k))=f(g(x))+h(k)[f'(g(x))+\varphi(h(k))]$$

donde se define $\varphi(0)=0$ y φ es continua en 0.

Calculamos el cociente incremental

$$\frac{f(g(x+k))-f(g(x))}{k}=\frac{h(k)}{k}[f'(g(x))+\varphi(h(k))]=\frac{g(x+k)-g(x)}{k}[f'(g(x))+\varphi(h(k))].$$

Observamos que cuando k tiende a 0, el primer factor del cociente incremental tiende a $g'(x)$ y el segundo tiende a $f'(g(x))$ (hemos usado que g es derivable y que φ es continua en 0).

Por lo tanto

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(g(x+k))-f(g(x))}{k}=f'(g(x))\cdot g'(x),$$

es decir,

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x).$$

Volver

Cintia Buxton, Lisi D'Alfonso, Flora Gutierrez, Gabriela Jeronimo, Gustavo Massaccesi, Juan Carlos Pedraza y Juan Sabia (2015), *Derivadas, Teóricas de Análisis Matemático (28)*.